

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

RAFAEL APARECIDO RODRIGUES DA PAZ

Efeitos de forças inerciais no escoamento
turbulento de um fluido

São Carlos
2023

RAFAEL APARECIDO RODRIGUES DA PAZ

Efeitos de forças inerciais no escoamento turbulento de um fluido

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Bacharel em Ciências Físicas e Biomoleculares.

Orientadora: Profa. Dra. Livia Souza Freire Grion - ICMC

**São Carlos
2023**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES TRABALHOS, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Paz, Rafael Aparecido Rodrigues da

Efeitos de forças inerciais no escoamento turbulento de um fluido / Rafael Aparecido Rodrigues da Paz; orientadora Livia Souza Freire Grion - - São Carlos, 2023.

28 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Ciências Físicas e Biomoleculares) - - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2023.

1. Turbulência. 2. Canal. 3. Forças Inerciais. I. Grion, Livia Souza Freire, orient. II. Título.

Resumo

Escoamentos turbulentos estão presentes nos mais diversos sistemas, em particular na camada limite atmosférica. Para tentar reproduzir esse fenômeno, emprega-se o modelo do canal, que em primeira abordagem não considera a maior parte das variáveis que impactam sua dinâmica, embora estas possam ser adicionadas posteriormente. A primeira correção imposta ao modelo é a rotação, o que introduz o surgimento de forças inerciais que modificam a direção do movimento do fluido, quando visto do referencial das paredes. Simulações numéricas diretas (DNS) reproduziram, em um escoamento turbulento, os perfis de tensão de cisalhamento, em todo o canal, e velocidade média, nas regiões em que há expressão analítica. Com a imposição da rotação, novos dados de DNS revelaram a mudança do campo médio de velocidades para um perfil espiral.

Palavras-chave: Turbulência. Canal. Forças Inerciais.

Sumário

1	Introdução	7
2	Equação de Navier-Stokes	8
3	Decomposição de Reynolds e RaNS	10
4	Balanço de Forças no Canal	13
5	Canal com rotação	19
6	Conclusão	27
7	Referências	28

1 Introdução

O estudo da camada limite atmosférica é de amplo interesse, uma vez que sua dinâmica interior influencia na evolução de fenômenos climáticos que impactam diretamente as atividades humanas. A maioria absoluta do transporte turbulento atmosférico se dá dentro dessa faixa, cuja dinâmica depende de diversas variáveis como gradientes de temperatura e pressão, umidade ou mesmo a rotação do planeta, o que leva ao surgimento de efeitos inerciais que provocam um deslocamento adicional na trajetória de grandes massas de ar.

Um modelo inicial para se tentar estudar fenômenos de transporte de fluidos atmosféricos na camada limite consiste no canal limitado por duas placas planas infinitas. Tal construção, em primeira abordagem, não leva em conta os efeitos do gradiente de temperatura ou do empuxo que surge devido à não-homogeneidade da densidade em zonas vizinhas. No entanto, é útil para entender quais são os entes físicos que governam o escoamento de correntes de ar e mesmo para prever o perfil médio de velocidades em um escoamento turbulento.

O primeiro efeito mais realista que se pode adicionar ao estudo do canal são as acelerações não inerciais experimentadas na superfície da Terra, devido à rotação do planeta. Ambos os efeitos, centrífugo e de Coriolis, variam de acordo com a latitude, podendo ter magnitudes distintas em diferentes localidades. Embora na atmosfera a direção de movimento de massas de ar não sejam necessariamente perpendiculares à direção de rotação da Terra, costuma-se usar essa configuração para introduzir rotação ao escoamento no canal, por ser a direção dominante.

Com isto em consideração, este estudo pretende descrever o escoamento estacionário e homogêneo de um fluido ao longo do canal, inicialmente sem rotação, visando obter expressões para os perfis verticais de tensão cisalhante e de velocidades médias que governam o escoamento turbulento. Tais expressões teóricas serão confrontadas com resultados de *Direct Numerical Simulation* (DNS, simulação numérica das equações governantes). Adiante, deve-se introduzir rotação ao canal e analisar como os efeitos inerciais emergentes modificam o movimento do fluido, novamente a partir da avaliação de dados oriundos de DNS.

Ao longo de todo o texto, será utilizada a notação ∂_X para se referir à derivação parcial em relação à variável X , representada aqui de forma genérica, e que pode corresponder tanto a uma das coordenadas espaciais x_i ($i = 1, 2, 3$), quanto à coordenada temporal t . Além disso, será empregada a notação indicial, de modo que, dentro de um mesmo termo, índices repetidos denotam implicitamente uma soma (1-2).

2 Equação de Navier-Stokes

Aplicando a segunda lei de Newton para descrever o movimento de um elemento de fluido, obtém-se o balanço de *momentum* linear, que representa como essa quantidade varia ao longo da sua trajetória e quais são as grandezas dinâmicas que provocam tal variação. Quando se lida com um fluido isotrópico que escoa sem que qualquer uma de suas porções rotacione de forma rígida e cuja deformação seja linear em relação ao seu gradiente de velocidades (fluido Newtoniano), tal balanço na direção x_i é governado pela equação de Navier-Stokes, que, na sua forma mais geral, é expressa por

$$\rho \left(\partial_t u_i + u_j \partial_{x_j} u_i \right) = f_i - \partial_{x_i} p + \partial_{x_j} \left[\mu \left(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j \right) - \frac{2}{3} \mu (\partial_{x_k} u_k) \delta_{i,j} \right]. \quad (1)$$

Em (1), f_i corresponde ao somatório das forças de corpo que atuam na direção x_i , isto é, às forças de ação à distância agentes em toda a extensão de qualquer elemento de fluido e não apenas nas regiões de contato deste. A variável $p = p(\vec{r}, t)$ denota a pressão em cada ponto do material, enquanto μ corresponde à viscosidade, uma grandeza que mede a proporcionalidade entre a deformação sentida por um fluido Newtoniano e a tensão cisalhante que a provoca.

Para os propósitos deste trabalho, será admitido que a densidade ρ e a viscosidade μ são constantes em todos os instantes e em qualquer ponto, além de que os fluidos tratados são incompressíveis. Isto simplifica a equação de Navier-Stokes para

$$\rho \left(\partial_t u_i + u_j \partial_{x_j} u_i \right) = f_i - \partial_{x_i} p + \mu \partial_{x_j x_j}^2 u_i, \quad (2)$$

onde se destaca que o termo $\partial_{x_j x_j}^2 u_i$ corresponde ao Laplaciano de tal componente do campo de velocidades.

Antes de interpretar cada termo, será mencionado o significado de cada membro na igualdade acima. À esquerda, tem-se as variações temporal explícita e espacial do campo de velocidades do fluido em uma direção. Este é o efeito cinemático sentido por um elemento material enquanto percorre sua trajetória, isto é, sua variação de *momentum* por unidade de volume. No lado direito, há todos os agentes dinâmicos que causam tal efeito: forças oriundas de fora do sistema (forças de corpo) em conjunto com stresses deformantes exercidos pelas porções vizinhas dentro do próprio fluido (forças de superfície). Embora (2) seja particularmente útil para o balanço de *momentum* de uma massa elementar, para considerar a dinâmica do escoamento de forma global, é útil re-escrever a equação de Navier-Stokes da seguinte maneira

$$\rho \left(\partial_t u_i + u_j \partial_{x_j} u_i \right) + \partial_{x_i} p - \mu \partial_{x_j x_j}^2 u_i = f_i. \quad (3)$$

O termo $u_j \partial_{x_j} u_i$ corresponde à advecção tridimensional da componente u_i do campo de velocidades, isto é, tal componente se propaga pelo espaço, viajando para pontos vizinhos com a velocidade do próprio campo, $\vec{u}(\vec{r}, t)$. Ou seja, quando um fluido escoar, em geral, o campo de velocidades se autotransporta, de modo a carregar o *momentum* de um ponto para as vizinhanças. Em paralelo a isso, o termo viscoso $\mu \partial_{x_j x_j}^2 u_i$ tenta atenuar o gradiente de velocidade em cada direção, buscando homogeneizar o campo velocidades por meio da difusão molecular da quantidade de movimento. A projeção do gradiente de pressão na direção considerada, $\partial_{x_i} p$ junta-se ao balanço, uma vez que, no interior do fluido, as trocas de *momentum* nas redondezas de um ponto induzem a variação de seu estado de movimento. Esses termos compensam a variação temporal do campo de velocidades, sendo toda essa evolução provocada pela aplicação de uma força externa resultante, f_i .

3 Decomposição de Reynolds e RaNS

De forma simples, o escoamento de um fluido pode ser classificado em dois regimes: laminar e turbulento. Essa classificação considera critérios como o ordenamento, a intensidade da vorticidade e o número de Reynolds, Re . Por ordenamento, refere-se à ocorrência ou ausência de mistura entre camadas adjacentes de material, isto é, se porções do fluido possuem componentes de velocidade além daquela principal que caracteriza seu movimento, de modo a carregar *momentum* advectivamente através do campo $\vec{u}$. Neste sentido, um escoamento ordenado possui baixa mistura, enquanto esta é alta em um escoamento desordenado. Já a vorticidade mede o padrão rotacional do campo de velocidades, mensurando a circulação de matéria pelas linhas de corrente em torno de uma região. Por fim, o número de Reynolds é uma estimativa da razão entre os termos de advectivo e viscoso presentes no escoamento, dado por

$$Re = \frac{uL}{\nu},$$

com u , L e ν correspondentes, respectivamente, a uma velocidade característica do escoamento, um comprimento de escala através do qual este se dá e o coeficiente de viscosidade cinemática, dado pela razão entre a viscosidade μ e a densidade ρ do fluido.

O regime laminar caracteriza-se por ser sempre ordenado (constituído de “lâminas” paralelas à direção principal do escoamento) e, em geral, apresentar-se com baixa vorticidade e pequeno número de Reynolds ($Re < 1000$). Outro aspecto marcante é a estabilidade, do ponto de vista matemático, do campo de velocidades em relação às condições iniciais do escoamento. Logo, para os mais diversos escoamentos laminares possíveis, desenvolvidos no mesmo ambiente sob a mesma dinâmica, as soluções, isto é, o perfil de velocidades de cada um deles, tomam sempre a mesma forma, ao passo que em um conjunto amplo de desenvolvimentos, os perfis tendem a se tornar idênticos. Assim, quando se toma médias das variáveis cinemáticas e dinâmicas em um *ensemble* que contempla uma margem extensa de possíveis condições iniciais, os resultados coincidem, virtualmente, com os valores de um escoamento individual.

O regime turbulento é marcado por sempre ser desordenado, apresentar alto Re e intensa vorticidade. Um perfil de velocidades turbulento é caracterizado pela alta sensibilidade às condições iniciais, de modo que, dois escoamentos turbulentos desenvolvidos no mesmo ambiente sob a mesma dinâmica, cujos valores das variáveis em um dado instante sejam ligeiramente diferentes, irão divergir completamente entre si nos instantes posteriores (comportamento caótico). Contudo, como tais variações são de natureza aleatória, as médias das variáveis mencionadas, em um *ensemble* de escoamentos turbulentos,

comportam-se de forma bem definida, pois dentro desse conjunto, todas as perturbações aleatórias se cancelariam.

Para escoamentos predominantemente unidimensionais, no caso laminar, qualquer componente de velocidade perpendicular à direção preferencial do escoamento é desprezível, em todos pontos e, nas situações mais comuns, o módulo do campo de velocidades depende apenas de uma coordenada espacial (seja ela uma das próprias direções, em um canal, ou a coordenada radial, no caso de um tubo circular); ao passo que no regime turbulento, o comportamento é exatamente o contrário: mesmo que a migração de matéria se dê preferencialmente em uma direção espacial, em todos os pontos há outras componentes de velocidades que não são desprezíveis e, inclusive, evoluem no tempo, mesmo em uma posição fixa.

Ao se levar isto em consideração, a Decomposição de Reynolds consiste de separar conceitualmente, para cada escoamento individual, cada uma das variáveis ϕ relativas a propriedades do escoamento, como a soma de sua média em um *ensemble*, $\bar{\phi}$, e a respectiva flutuação, particular do desenvolvimento considerado, $\delta\phi$, isto é

$$\phi = \bar{\phi} + \delta\phi,$$

onde se deve notar que a média das flutuações é nula por definição, isto é, $\overline{\delta\phi} = 0$.

Pode-se então usar a decomposição de Reynolds em (3). Embora esse procedimento não tenha qualquer valor para um único escoamento individual, ao se tomar uma média de *ensemble* sobre a equação de Navier-Stokes, torna-se nítida a dinâmica dominante do escoamento, independente do regime, e como essa evolução é afetada pelas flutuações. Pela linearidade e comutação entre as operações de média de *ensemble* e derivação, tal procedimento leva a

$$\rho \left[\partial_t \bar{u}_i + \partial_{x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i) \right] + \partial_{x_i} \bar{p} - \mu \partial_{x_j x_j}^2 \bar{u}_i + \partial_{x_j} (\overline{\delta u_j \delta u_i}) = \bar{f}_i, \quad (4)$$

onde se usou a incompressibilidade do fluido para escrever $\bar{u}_j$ dentro da derivada no termo advectivo. Refere-se a (4) como “Equação de Navier-Stokes com média de Reynolds”, ou, mais comumente, RaNS (do inglês *Reynolds-averaged Navier-Stokes*).

Deve-se notar que (4) difere de (3) apenas pelo termo $\partial_{x_j} (\overline{\delta u_j \delta u_i})$. Em um regime laminar, tal quantidade é virtualmente nula, ao contrário do que ocorre para o caso turbulento, quando é altamente relevante. Portanto, esse termo carrega consigo toda a informação sobre o efeito da turbulência no escoamento médio, de forma exclusiva. Como surgiu do termo advectivo, a parcela turbulenta revela que tal regime emerge do auto-transporte do campo de velocidades. Estatisticamente, $\overline{\delta u_j \delta u_i}$ corresponde à covariância

entre as componentes u_i e u_j , de modo que, quanto mais instável for o escoamento, isto é, quanto mais sensível às condições iniciais dentro do *ensemble*, maior a magnitude desse termo. Assim, pode-se entender a turbulência como “um campo de velocidades que se autoadvecta caoticamente” (3).

4 Balanço de Forças no Canal

O canal consiste em um ambiente limitado espacialmente em uma direção (isto é, limitado por ao menos uma parede) e infinito nas demais direções. Embora um primeiro modelo para estudar a dinâmica atmosférica parta de um canal semi-infinito, aqui será tratado o balanço de forças em um canal de espessura finita 2Δ , cujos limites são duas paredes paralelas. Isto pode ser feito porque a dinâmica na região próxima à parede inferior é idêntica nos dois casos.

Para o escoamento de interesse, supõe-se que o movimento predominante é unidimensional, cuja direção correspondente será denominada x_1 . A direção perpendicular às paredes, através da qual ocorrem as variações mais intensas das grandezas que caracterizam o escoamento, será chamada x_2 . A última direção (lateral) é x_3 . Assim, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, é a posição de um ponto. Por simplicidade, será tratado o caso em que o campo de velocidades é homogêneo nas direções x_1 e x_3 , ou seja, derivadas de qualquer estatística do escoamento nessas direções são identicamente nulas. Desse modo, o campo de velocidade média, $\bar{\vec{u}}$, pode variar apenas na direção x_2 . Adicionalmente, supõe-se que a força externa resultante é identicamente nula, $\vec{f} = \vec{0}$, o que permite impor que o escoamento seja estacionário. Por fim, novamente visando eliminar complicações inicialmente desnecessárias, considera-se que não há movimento na direção x_3 , o que significa que $\bar{u}_3$ e δu_3 são identicamente nulos também.

Nas paredes do canal não há qualquer movimento. Usando esta condição de contorno, a incompressibilidade do fluido e a hipótese de homogeneidade, é obrigatório que a média da componente da velocidade perpendicular à parede do canal, $\bar{u}_2$, seja identicamente nula. Logo, o campo de velocidade média tem a seguinte forma: $\bar{\vec{u}} = (\bar{u}_1(x_2), 0, 0)$.

Antes de escrever a equação RaNS, olha-se para cada um de seus termos em (4). Primeiramente, a derivada temporal desaparece, pois o escoamento é estacionário. O termo advectivo também se anula, pela homogeneidade do sistema, em adição à conclusão obtida no parágrafo anterior,

$$\partial_{x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i) = \partial_{x_2} (\bar{u}_2 \bar{u}_i) = 0.$$

Para o termo viscoso, apenas a componente na direção x_1 não se anula, uma vez que nela está contida a única componente do campo médio de velocidades que é diferente de zero. Por fim, a parcela turbulenta desaparece apenas na direção x_3 , pela hipótese de ausência de flutuações.

Deste modo, isolando cada entrada do gradiente de pressão em (4), escreve-se RaNS em todas as direções, atentando-se ao fato de que as derivadas que atuam sobre as com-

ponentes do campo de velocidades tornam-se ordinárias,

$$\begin{cases} \partial_{x_1} \bar{p} = \frac{d}{dx_2} \left[\mu \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} - \rho \left(\overline{\delta u_2 \delta u_1} \right) \right], \\ \partial_{x_2} \bar{p} = -\rho \frac{d}{dx_2} \left(\overline{\delta u_2 \delta u_2} \right), \\ \partial_{x_3} \bar{p} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

A terceira equação em (5) revela que não há variação da pressão ao longo de x_3 , consequência das hipóteses de simplificação do problema. No entanto, pode-se integrar a segunda equação ao longo da direção x_2 , tomando como limites a altura de parede inferior, zero, e uma coordenada qualquer, variável, que será novamente chamada de x_2 . Tal procedimento leva a

$$\rho \left[\overline{\delta u_2 \delta u_2}(0) - \overline{\delta u_2 \delta u_2}(x_2) \right] = \bar{p}(x_1, x_2) - \bar{p}(x_1, 0).$$

A condição de contorno na parede exige que $\delta u_2(0) = 0$. Assim, chama-se de $\bar{p}_w(x_1)$ o valor médio da pressão em $x_2 = 0$ e deriva-se a equação anterior em relação a x_1 , o que gera

$$\partial_{x_1} \bar{p}(x_1, x_2) = \frac{d\bar{p}_w}{dx_1}(x_1).$$

Nota-se que esse resultado revela que, embora os valores absolutos da pressão sejam, em geral, diferentes em alturas distintas, a variação dessa grandeza na direção x_1 é a mesma para todos os valores de x_2 entre 0 e 2Δ , em particular na própria parede. Ao se usar esse fato na primeira equação de (5) e definindo nesta o termo entre colchetes por $\tau = \tau(x_2)$, re-escreve-se o balanço de forças na direção do movimento principal, x_1

$$\frac{d\bar{p}_w}{dx_1} = \frac{d}{dx_2} \left[\mu \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} - \rho \left(\overline{\delta u_2 \delta u_1} \right) \right] = \frac{d\tau}{dx_2}. \quad (6)$$

Antes de interpretar a igualdade, interpreta-se a tensão τ . De natureza cisalhante, esse agente dinâmico carrega consigo a informação sobre a competição entre os efeitos viscoso, que tenta suavizar o campo de velocidades, e turbulento, que tenta acentuar ainda mais o gradiente de velocidades por meio das flutuações e do autotransporte. O efeito líquido disso é uma tendência de aceleração na direção principal de movimento, cujo sentido depende do regime e do perfil de velocidades nas vizinhanças de cada ponto, provocada por variações locais de τ . Em contraponto, a componente do gradiente de pressão se opõe a esse efeito, balanceando o gradiente da tensão cisalhante. Então (6) expressa o fato de que a dinâmica do escoamento em qualquer ponto do canal pode ser entendida ao se olhar

para o equacionamento de forças na parede.

Atentando-se a (6), é evidente que seu primeiro membro depende apenas de x_1 ao passo que o último depende apenas de x_2 . Logo, ambos devem ser constantes. Batiza-se por τ_w a tensão de parede, $\tau(x_2 = 0)$, para integrar a equação mencionada em relação a x_2 de 0 a Δ , o que permite expressar $\frac{d\bar{p}_w}{dx_1}$ como o oposto da razão entre τ_w e Δ , uma vez que τ deve ser antissimétrica e, portanto, nula em $x_2 = \Delta$. Usando isso, uma integração posterior na mesma direção, de Δ até uma posição variável x_2 , permite a obtenção de uma expressão para a tensão de cisalhamento

$$\tau(x_2) = \left(1 - \frac{x_2}{\Delta}\right) \tau_w. \quad (7)$$

Desta forma, conclui-se que, no interior do canal, a tensão varia linearmente na direção perpendicular às paredes. Por (6), isso significa que a pressão do fluido diminui linearmente ao longo da direção x_1 , impulsionando o escoamento nessa direção.

Apesar desse comportamento global, as tensões viscosa, $\mu \frac{d\bar{u}_1}{dx_2}$, e turbulenta, $\overline{\rho \delta u_2 \delta u_1}$, são intensamente variadas ao longo da extensão do sistema, mantendo, no entanto, a tendência linear de τ . Há regiões em que um dos termos é completamente dominante enquanto o outro é desprezível e faixas de transição em que não há domínio relativo de um sobre o outro, no sentido de ordens de grandeza. As regiões predominantemente viscosas se encontram muito próximas às paredes, ao passo que aquelas cujo módulo da tensão turbulenta é apreciável localizam-se mais distantes.

No regime laminar, a tensão turbulenta desaparece e (6) é re-escrita como

$$\mu \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_2^2} = -\frac{\tau_w}{\Delta},$$

que pode ser integrada na direção transversal, de Δ (onde, por simetria, $\frac{d\bar{u}_1}{dx_2}$ é nula) à posição variável x_2 e, em seguida, repete-se a mesma operação, de 0 a outra altura x_2 , o que permite a obtenção de

$$\bar{u}_1(x_2) = \frac{\tau_w x_2}{2\mu} \left(2 - \frac{x_2}{\Delta}\right),$$

isto é, uma solução analítica para o escoamento laminar no canal.

Retoma-se então o caso mais geral (turbulento). Para analisar com mais detalhes, pode-se definir duas escalas adimensionais de comprimento: x_2/Δ e $x_2^+ = u^* x_2/\nu$, onde u^* , chamada de “velocidade de atrito”, é uma escala típica de velocidades do escoamento em alturas muito próximas à parede do canal, sendo definida por $u^* \equiv \sqrt{\tau_w/\rho}$. Olhando para a primeira escala de comprimento, pode-se chamar de “camada interna” a região em

que $x_2/\Delta \ll 1$, ao passo que se batiza de “camada externa” a faixa tal que $x_2^+ \gg 1$. Deve-se atentar ao fato de que, como tais camadas são definidas a partir de escalas adimensionais diferentes, elas não são disjuntas, isto é, há uma faixa de sobreposição.

Dentro da camada interna, há uma região ainda menor, próxima o suficiente da parede tal que $\tau \approx \tau_w$. Nessa região, a proximidade com tal barreira física exige que as flutuações sejam desprezíveis, enquanto o efeito viscoso é completamente dominante. Emprega-se a definição de τ , sem a tensão turbulenta, que é nula nessa “subcamada viscosa” e obtém-se

$$\mu \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} \approx \tau_w,$$

a qual se pode isolar a derivada e integrar os dois membros da relação subsequente entre as alturas 0 e x_2 variável, esta contida na subcamada viscosa. Substitui-se $\tau_w = \rho (u^*)^2$ e, por fim, divide-se os dois membros da expressão pela velocidade de atrito. Isto leva a

$$\frac{\bar{u}_1}{u^*} \equiv u_1^+(x_2^+) \approx x_2^+, \quad (8)$$

onde se definiu u_1^+ , uma velocidade adimensional, como a razão entre a média de Reynolds da velocidade principal do escoamento, $\bar{u}_1$, e a velocidade de atrito, que é a escala típica de velocidades nessa região, como mencionado anteriormente. Nota-se que, embora a região interna foi definida em termos de x_2/Δ , a variação do escoamento no interior da subcamada viscosa, contida naquela, é governada por x_2^+ .

Pode-se então propor que, dentro de toda a camada interna, o perfil de velocidades adimensionais deve depender de x_2^+

$$u_1^+ = g(x_2^+), \quad \frac{x_2}{\Delta} \ll 1, \quad (9)$$

em que g é uma forma funcional desconhecida, *a priori*, que tende para a forma linear na subcamada viscosa.

Antes de explorar tal proposição, deve-se analisar a camada externa. Esta, estende-se em torno do centro do canal. Portanto, é útil analisar o desvio de velocidades conforme se afasta dessa altura, diferença esta expressa por $\bar{u}_1(\Delta) - \bar{u}_1(x_2)$. Em torno de $x_2 = \Delta$, a turbulência é dominante e, conseqüentemente, há intensa vorticidade, de modo que nessa faixa estão centrados os maiores turbilhões que a extensão do canal é capaz de acomodar. Logo, propõe-se que o desvio mencionado deve ser expresso em termos da escala x_2/Δ , e não x_2^+ , que é adimensionalizado usando a velocidade de atrito, escala de velocidades adequada quando os efeitos viscosos são dominantes. Assim, lança-se mão de

$$\frac{\bar{u}_1(\Delta) - \bar{u}_1(x_2)}{u^*} = h\left(\frac{x_2}{\Delta}\right), \quad x_2^+ \gg 1, \quad (10)$$

onde h , da mesma maneira que g , é uma forma funcional desconhecida.

Ressalta-se que, até este ponto, tem-se (9) e (10) supostamente válidas dentro da camada interna e externa, respectivamente. Para cada região, calcula-se $x_2 \frac{d\bar{u}_1}{dx_2}$ com objetivo de obter expressões convenientes.

$$\begin{cases} x_2 \frac{d}{dx_2} [u^* g(x_2^+)] = u^* x_2^+ \frac{dg}{dx_2^+} & , \quad \frac{x_2}{\Delta} \ll 1, \\ x_2 \frac{d}{dx_2} [\bar{u}_1(\Delta) - u^* h\left(\frac{x_2}{\Delta}\right)] = -u^* \frac{x_2}{\Delta} \frac{dh}{d\left(\frac{x_2}{\Delta}\right)} & , \quad x_2^+ \gg 1. \end{cases}$$

Dentro da região de sobreposição, ambas as equações acima são válidas, o que leva a

$$x_2^+ \frac{dg}{dx_2^+} = -\frac{x_2}{\Delta} \frac{dh}{d\left(\frac{x_2}{\Delta}\right)}$$

Considera-se, então, um valor qualquer $x_2 = y$ dentro da faixa de sobreposição. Imagina-se, em seguida, que a velocidade de atrito, a viscosidade cinemática e a semiespessura do canal, u^* , ν e Δ , respectivamente, antes fixas, agora estão livres para serem variadas. Isso permite, para y fixo dentro da região de superposição, tratar as duas escalas de comprimento como variáveis independentes, uma vez que Δ , uma propriedade do canal, varie independentemente dos demais valores. Tal construção permite afirmar que, sob essas hipóteses, os dois membros da equação acima são constantes, cujo valor é consagradamente escrito por $1/\kappa$, onde κ é conhecida como constante de von Karmán,

$$x_2^+ \frac{dg}{dx_2^+} = \frac{1}{\kappa}.$$

Depois de se isolar a derivada nesta equação, a primitivação em relação a x_2^+ leva ao resultado principal

$$u_1^+ = g(x_2^+) = \frac{1}{\kappa} \ln(x_2^+) + B. \quad (11)$$

Como y é qualquer, tal resultado, que é conhecido como “Lei logarítmica de Parede” ou “*log-law*”, é válido em toda a zona de sobreposição entre as camadas interna e externa. Esse comportamento é reproduzido em simulações computacionais e experimentos. O valor de κ oriundo dessas análises varia entre 0.38 – 0.41, de modo que se considera como bem determinando apenas até a primeira casa decimal. A constante B é registrada como sendo aproximadamente 5.2 (2-4).

Uma justificativa da validade deste modelo de canal homogêneo e estacionário vem dos resultados de simulações numéricas diretas das equações de Navier-Stokes originais (DNS), (3), que registraram os resultados descritos nesta seção (5). A figura abaixo mostra a reprodução de (7), (8) e (11) para dois valores distintos do número de Reynolds.

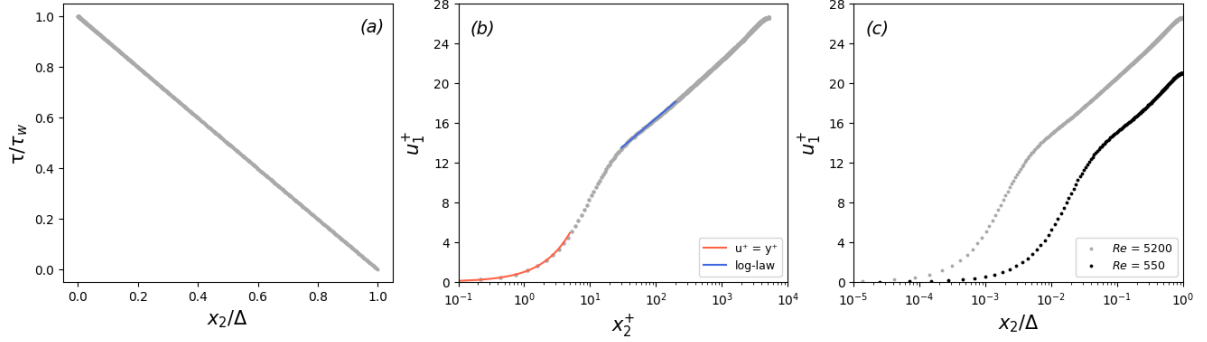


Figura 1: Simulação numérica direta (DNS, dados de LEE; MOSER (5)). Pontos cinza e pretos referem-se a $Re = 5200$ e $Re = 550$, respectivamente. (a) Tensão cisalhante normalizada, τ/τ_w , entre a parede inferior e o centro do canal. (b) Perfil de velocidades adimensionalizadas, u_1^+ , ao longo do canal, em comparação com os comportamentos linear e logarítmico, na subcamada viscosa ($x_2^+ < 5$) e região de sobreposição ($30 < x_2^+ < 200$), respectivamente. Ajustou-se $\kappa = 0.41$. (c) Comparação entre escoamentos para dois números de Reynolds.

Fonte: Adaptado de FREIRE (4).

Como pode ser visto na figura 1(a), a tensão cisalhante τ decai linearmente a partir da base, até se anular em $x_2/\Delta = 1$, devido à sua antissimetria. Embora não seja mostrado na figura, a partir dos dados disponibilizados oriundos da simulação, pode-se verificar que, ao passo que a parcela viscosa é dominante muito próximo das placas, na região de sobreposição há domínio da tensão turbulenta. Na zona da camada interna entre essas faixas, ocorre a transição entre essas componentes (4). A figura 1(b) revela o ótimo ajuste dos dados medidos para a velocidade u_1^+ em comparação com a teoria. O comportamento linear manteve-se para $x_2^+ < 5$, outro indício da presença da subcamada viscosa, enquanto a lei logarítmica foi registrada para $30 < x_2^+ < 200$. Entre essas faixas, verificou-se a transição suave do comportamento linear para o logarítmico. Em 1(c), mostra-se a variação das velocidades ao longo do canal, em termos de x_2/Δ para dois escoamentos com números de Reynolds iguais a 5200 e 550. Novamente, visualiza-se para ambas a subcamada viscosa e a faixa logarítmica. No entanto, para $Re = 5200$, a extensão da subcamada sofre uma redução notável, devido ao aumento da vorticidade e mistura, o que caracteriza o alargamento do domínio turbulento.

5 Canal com rotação

Antes de introduzir rotação ao canal, será descrita a transformação da variação temporal de um vetor qualquer, a partir de um referencial inercial F , para um referencial G que gira sem translação em relação àquele, com velocidade angular constante $\vec{\Omega}$. Seja $\vec{v}$ uma grandeza vetorial que é descrita no sistema de coordenadas girante por

$$\vec{v} = v_j \hat{x}_j,$$

em que a notação indicial foi novamente usada, ou seja, há três componentes, de forma geral, constituindo a descrição de $\vec{v}$. O conjunto $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$ corresponde aos vetores unitários do referencial móvel.

Busca-se então descrever qual a taxa de variação temporal de $\vec{v}$ vista a partir do referencial fixo. Nesta representação, tanto as componentes, quanto os versores de G evoluem no tempo quando observados de F . Assim, sabe-se que

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_F = \left(\frac{dv_j}{dt}\right)_F \hat{x}_j + v_j \left(\frac{d\hat{x}_j}{dt}\right)_F, \quad (12)$$

onde o subscrito F torna explícito que o ponto de vista tomado se dá em relação a tal referencial. Como G gira sem trasladar em relação a F , as derivadas das componentes v_j devem ser as mesmas quando calculadas usando ambos os sistemas de coordenadas. Este fato permite identificar que

$$\left(\frac{dv_j}{dt}\right)_F \hat{x}_j = \left(\frac{dv_j}{dt}\right)_G \hat{x}_j = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_G,$$

pois os versores de G são constantes neste referencial. O índice denotado na derivada foi empregado de forma análoga ao mencionado anteriormente.

Por fim, analisa-se a taxa de variação dos vetores unitários $\{\hat{x}_j\}$ quando vista do referencial fixo. Tal evolução é provocada por $\vec{\Omega}$, de modo que, quanto maior o módulo deste, maior é o módulo da derivada. Além disso, o vetor momento angular impõe a direção a qual o versor deve girar, em cada instante de tempo. Tal desvio se dá na direção que é perpendicular tanto a $\vec{\Omega}$, quanto ao próprio $\hat{x}_j$. Logo, conclui-se que

$$v_j \left(\frac{d\hat{x}_j}{dt}\right)_F = v_j (\vec{\Omega} \times \hat{x}_j) = \vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

Inserire-se as duas últimas equações em (12) para se obter

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_F = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_G + \vec{\Omega} \times \vec{v}.$$

A equação acima relaciona a derivada em relação ao tempo de $\vec{v}$ experimentada no referencial inercial com a taxa análoga vista do referencial girante. Deve-se notar que em nenhuma passagem se utilizou qualquer decomposição de $\vec{v}$ em algum dos referenciais no primeiro membro. No entanto, ali deve ser inserida a forma de $\vec{v}$ quando observado de F .

Como a relação de transformação foi obtida para um vetor qualquer, pode-se considerar o vetor posição $\vec{r}$ de um ponto. Substituindo-o na expressão, encontra-se

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_F = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_G + \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

A derivada acima resulta em um novo vetor, que também obedece à lei de transformação entre os referenciais F e G . Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_F\right]_F &= \left\{\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_G + \vec{\Omega} \times \vec{r}\right]\right\}_G + \vec{\Omega} \times \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_G + \vec{\Omega} \times \vec{r}\right], \\ \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_F &= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_G + 2\vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_G + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (13)$$

As parcelas do tipo $\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)$ são imediatamente interpretadas como as acelerações de algum objeto que segue uma trajetória $\vec{r} = \vec{r}(t)$, descrita no respectivo referencial. Então, a seguir, se apresenta o significado físico de cada um dos demais termos, oriundos da descrição a partir de uma sistema de referência não inercial.

Inicialmente, por conveniência, descreve-se $\vec{r}$ no referencial girante como uma soma vetorial entre uma componente que aponta na direção perpendicular a $\vec{\Omega}$, direção esta denotada por $\hat{\Omega}_\perp$, e outra parcela que é direcionada paralelamente ao momento angular, isto é, na direção $\hat{\Omega}$. Isso quer dizer

$$\vec{r} = R\hat{\Omega}_\perp + S\hat{\Omega}$$

em que R e S são as magnitudes de tais componentes. É útil ressaltar que $\hat{\Omega}_\perp$ está contido no mesmo plano que o vetor momento angular e $\vec{r}$. Além disso, está implícito que $\vec{\Omega} = \Omega\hat{\Omega}$. Essa passagem facilita o cálculo dos produtos vetoriais.

Efetua-se o primeiro produto vetorial, $\vec{\Omega} \times \vec{r}$, cujo módulo é ΩR e aponta na direção $\hat{\Omega} \times \hat{\Omega}_\perp$, que é perpendicular ao plano definido por $\vec{\Omega}$ e $\vec{r}$. Ao tomar esse resultado e calcular

o segundo produto vetorial, obtém-se uma re-escala no módulo do vetor resultante por um fator Ω , sendo que aquele aponta no sentido $-\hat{\Omega}_\perp$, ou seja

$$\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{r} = -\Omega^2 R \hat{\Omega}_\perp = -\Omega^2 \vec{R}$$

onde se batizou $R \hat{\Omega}_\perp = \vec{R}$.

Nota-se que esse termo aponta em direção ao eixo de rotação, isto é, esse efeito, quando visto do referencial inercial, é uma componente de aceleração que tenta aproximar o objeto em movimento do eixo o qual o referencial G executa sua rotação. Desse modo, quando se observa a partir do referencial girante, o corpo tende a sentir uma impulsão no sentido contrário, logo, experimenta uma aceleração centrífuga que tenta afastá-lo do eixo de rotação mencionado. Na superfície da Terra, que é um referencial do tipo G , aproximadamente, há o efeito centrífugo mencionado, que é nulo nos polos e máximo no equador. Como resultado, há uma “gravidade aparente”, que é a soma entre a aceleração gravitacional dada pela Lei da Gravitação Universal e a componente centrífuga, que fora dos polos não aponta exatamente para o centro do planeta, embora o desvio angular seja muito pequeno.

Quanto ao termo $2 \vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_G$, de pronto se vê que significa um desvio perpendicular ao vetor velocidade visto do referencial girante. Ao contrário da aceleração centrífuga, esse termo não aponta em direção ao eixo de rotação, embora curve a trajetória de qualquer objeto em movimento em torno de um eixo que depende da direção instantânea da velocidade ao longo da trajetória. Essa aceleração é chamada de “Efeito Coriolis” e tem como manifestação mais dramática na Terra a curvatura de grandes massas de ar em torno de regiões de baixa ou alta pressão, o que pode culminar na ocorrência de furacões.

Ao se considerar isso, pode-se então tratar da situação em que o canal está em rotação constante e descreve-se o campo de velocidades $\vec{u}$ do fluido como visto em um referencial que se move solidariamente às paredes do canal. Para esse caso, re-escreve-se (13) em termos de $\vec{u}$, omitindo o índice G para a descrição no referencial girante, preso às paredes do canal, removendo o índice F da operação de derivação e indicando explicitamente no campo de velocidades e, por fim, substituindo a derivação temporal $\frac{d}{dt}$ pela derivada material $\frac{D}{Dt}$

$$\frac{D\vec{u}_F}{Dt} = \frac{D\vec{u}}{Dt} + 2 \vec{\Omega} \times \vec{u} - \Omega^2 \vec{R}$$

Deve-se enfatizar que $\vec{u}_F$ e $\vec{u}$ são campos de velocidades diferentes. Enquanto o primeiro foi adequado para o tratamento do escoamento no canal com paredes em repouso, adiante, com o uso da rotação, deve lançar-se mão do segundo, que é descrito a partir

de um referencial não inercial. Desta maneira, o primeiro membro de (2) corresponde ao primeiro membro da equação acima. Então, a substituição desta expressão naquela permite se usar a equação de Navier-Stokes para descrever o movimento do fluido, mesmo que em um referencial girante,

$$\rho \left(\partial_t u_i + u_j \partial_{x_j} u_i + 2 \vec{\Omega} \times \vec{u} - \Omega^2 \vec{R} \right) = -\partial_{x_i} p + \mu \partial_{x_j x_j}^2 u_i. \quad (14)$$

Acima, escreveu-se a derivada material como uma composição das derivadas parciais, cujas derivações espaciais originam o termo advectivo.

No caso mais geral, o vetor momento angular tem todas as componentes não-nulas, de modo que há aceleração de Coriolis em todas as direções. Isto é visto ao se abrir o termo mencionado

$$2 \vec{\Omega} \times \vec{u} = \epsilon_{ijk} \Omega_j u_k \hat{x}_i,$$

em que ϵ_{ijk} é a entrada de um tensor que define o sentido da aceleração na direção x_i . Ressalva-se que há uma soma implícita no segundo membro desta equação. No entanto, os modelos usuais costumam considerar $\vec{\Omega}$ como paralelo a umas das direções preferenciais utilizadas para apresentar o escoamento do fluido.

Quando se toma $\vec{\Omega} = \Omega \hat{x}_1$, não há alterações substanciais no perfil do campo médio de velocidades associado ao escoamento pelo canal, exceto por uma redução de velocidade na faixa central do canal. Por outro lado, ao se considerar $\vec{\Omega} = \Omega \hat{x}_3$, há uma mudança intensa no perfil do campo, que se torna assimétrico em relação à linha média do canal e ainda mais turbulento. Tais comportamentos preditos teoricamente foram confirmados por simulações e experimentos (6).

No entanto, será tratado o caso em que $\vec{\Omega} = \Omega \hat{x}_2$, o que permite manter muitas condições que emergiram do tratamento do canal em repouso. Antes de aplicar a decomposição de Reynolds, re-escreve-se (14) isolando o termo de variação temporal e adimensionalizando a equação pela multiplicação de ambos os membros por $\Delta/(u^*)^2$ onde Δ é a meia-largura do canal, que é idêntico ao anteriormente tratado, e u^* é a velocidade de atrito para o escoamento sem rotação. Nesse processo, a variável temporal t foi re-escalada para o tempo adimensional tu^*/Δ , enquanto todas as coordenadas espaciais e componentes do campo de velocidades foram re-escaladas pela semilargura e pela velocidade de atrito, respectivamente. Ademais, a pressão foi adimensionalizada pela tensão de parede, τ_w . Em que pese essa série de manipulações com as variáveis originais, para alívio de notação, as novas variáveis adimensionalizadas continuarão a ser denotadas pelos símbolos das variáveis antigas pertinentes. Pelo resto deste texto, se trabalhará com as variáveis adimensionais. Finalmente, enuncia-se a equação de Navier-Stokes contendo tais alterações

como

$$\partial_t u_i = -\partial_{x_i} p + \left(\frac{1}{4} Ro^2 \vec{R} \right)_i + \frac{1}{Re} \partial_{x_j x_j}^2 u_i - u_j \partial_{x_j} u_i - \epsilon_{i2k} Ro u_k, \quad (15)$$

em que Ro é o número de rotação, definido pela razão $2\Omega\Delta/u^*$, e Re é o número de Reynolds característico do escoamento no canal não girante, isto é, calculado pela razão $u^*\Delta/\nu$.

Ao se atentar ao termo centrífugo, $\frac{1}{4}Ro^2\vec{R}$, deve-se notar que este pode ser escrito a partir de um potencial da forma $\frac{1}{8}(Ro R)^2$, o qual o zero foi ajustado para coincidir com o eixo de rotação. Essa visualização permite escrever a aceleração centrífuga acima como a derivada do potencial mencionado. Para se aproveitar desse fato, subtrai-se esse termo da pressão normalizada p , o que resulta em uma pressão efetiva, $p - \frac{1}{8}(Ro R)^2$, que adiante será denotada apenas por p , para alívio de notação. Logo, com essa abordagem, toda a dinâmica promovida pela componente centrífuga está absorvida em uma pressão efetiva cujos gradientes impulsionam o escoamento do fluido.

Emprega-se a decomposição de Reynolds seguida de uma média de *ensemble* em (15), o que leva a

$$\partial_t \bar{u}_i = -\partial_{x_i} \bar{p} + \frac{1}{Re} \partial_{x_j x_j}^2 \bar{u}_i - \partial_{x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i) - \partial_{x_j} (\overline{\delta u_j \delta u_i}) - \epsilon_{i2k} Ro \bar{u}_k, \quad (16)$$

onde se nota novamente a presença explícita da tensão turbulenta.

Neste ponto, pode-se tratar o escoamento médio de interesse. Novamente, considera-se um regime estacionário, em que a derivada temporal desaparece no primeiro membro, além de se lançar mão de hipóteses de homogeneidade nas direções x_1 e x_3 e incompressibilidade (o que permitiu, implicitamente, reorganizar o termo advectivo médio como o produto das velocidades dentro da derivada). Como o canal está girando, ao contrário da situação de repouso, obrigatoriamente há uma componente $\bar{u}_3$ no campo de velocidades, que então tem a forma $\vec{\bar{u}} = \vec{\bar{u}}(x_2) = (\bar{u}_1(x_2), 0, \bar{u}_3(x_2))$. Mais uma vez, a incompressibilidade do fluido em conjunto com a não penetrabilidade nas placas leva ao anulamento de $\bar{u}_2$. Isto implica que o termo advectivo também é nulo para as três direções.

Ao se aplicar todos esses fatos em (16), emerge o seguinte sistema de equações médias para cada uma das direções

$$\begin{cases} \partial_{x_1} \bar{p} = -\partial_{x_2} (\overline{\delta u_2 \delta u_1}) + \frac{1}{Re} \partial_{x_2}^2 \bar{u}_1 - Ro \bar{u}_3, \\ \partial_{x_2} \bar{p} = -\partial_{x_2} (\overline{\delta u_2 \delta u_2}), \\ \partial_{x_3} \bar{p} = -\partial_{x_2} (\overline{\delta u_2 \delta u_3}) + \frac{1}{Re} \partial_{x_2}^2 \bar{u}_3 + Ro \bar{u}_1, \end{cases} \quad (17)$$

onde, em analogia ao caso estacionário, se nota a impulsão promovida pelo gradiente de pressão efetiva, $\bar{p}$, que é igualado pela competição entre efeitos viscosos, pelas flutuações de velocidade e, adicionalmente, pela rotação a que o fluido está sujeito quando observado do referencial girante.

Apesar das diferenças entre (5) e (17), as equações correspondentes na direção x_2 são análogas, e um procedimento similar de integração na direção vertical e derivação em relação a x_1 permite se chegar na mesma conclusão da situação do canal em repouso: a variação da pressão na direção principal do escoamento, x_1 , é igual em todas as alturas x_2 , ou seja, é a mesma variação que ocorre ao longo da parede.

Adicionalmente, impõe-se que o gradiente de pressão seja nulo na direção x_3 . Isso significa que todo movimento nesta direção é impulsionado pelo efeito Coriolis, o que quer dizer que não há um ente físico provocando deslocamento nessa direção, mas sim que esse movimento só é registrado, quando visto a partir das placas girantes do canal, pelo fato de que este é um referencial não inercial. Deste modo, (17) é simplificado para

$$\begin{cases} \partial_{x_1} \bar{p}_w = -\partial_{x_2} (\overline{\delta u_2 \delta u_1}) + \frac{1}{Re} \partial_{x_2}^2 \bar{u}_1 - Ro \bar{u}_3, \\ 0 = -\partial_{x_2} (\overline{\delta u_2 \delta u_3}) + \frac{1}{Re} \partial_{x_2}^2 \bar{u}_3 + Ro \bar{u}_1. \end{cases} \quad (18)$$

Para a situação particular de um escoamento laminar, pode-se, em analogia ao canal em repouso, impor um gradiente de pressão constante em x_1 . Por conveniência, escolhe-se o valor desta constante como -1. Apenas para analisar esta situação, pode-se definir outra escala de velocidades, $U_i = \bar{u}_i / Re$, cujo fator de re-escala é o inverso do número de Reynolds para o escoamento no canal em repouso. Com isso, (18) transforma-se em

$$\begin{cases} 1 + \partial_{x_2} U_1 - 2T^2 U_3 = 0, \\ \partial_{x_2} U_3 + 2T^2 U_1 = 0, \end{cases}$$

com um novo parâmetro, T^2 , definido pelo produto entre o número de Reynolds do escoamento do canal em repouso, Re , e o fator adimensional de rotação do canal girante, Ro .

O sistema acima é solúvel analiticamente, cujas soluções são dadas por

$$U_1 = \frac{\alpha(T)\beta[T(x_2 - \Delta)] - \beta(T)\alpha[T(x_2 - \Delta)]}{\gamma(T)},$$

$$U_3 = \frac{1}{2T^2} - \frac{\alpha(T)\alpha[T(x_2 - \Delta)] + \beta(T)\beta[T(x_2 - \Delta)]}{\gamma(T)},$$

em que as funções α , β e γ tem as seguintes formas

$$\begin{cases} \alpha(z) = \sin(z) \sinh(z), \\ \beta(z) = \cos(z) \cosh(z), \\ \gamma(T) = T^2 [\cos(2T) + \cosh(2T)]. \end{cases}$$

Então, mesmo para o canal girando com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega \hat{x}_2$, há uma solução analítica para descrever o escoamento laminar. Um fato importante que surge dessas soluções é que, conforme T , isto é, Ro , aumenta, o perfil da componente da velocidade na direção x_3 passa por um máximo antes de decair continuamente, enquanto na direção x_1 a velocidade decai, em todos os pontos, monotonicamente (6).

Para o escoamento turbulento no canal girante, pela falta de uma solução analítica, contou-se com os dados de MEDIZADEH; OBERLACK (6) para se verificar a dependência das componentes de velocidade com a taxa de rotação. Para isso, mostra-se abaixo o perfil das componentes do campo que descreve o escoamento ao longo da direção x_2 . Notou-se claramente que o aumento da rotação favorece a redução da componente $\bar{u}_1$ e o crescimento de $\bar{u}_3$ para valores baixos de Ro .

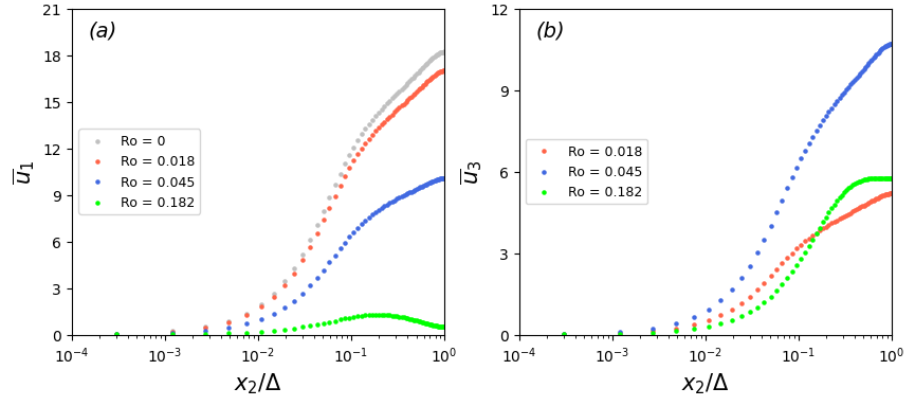


Figura 2: Simulação numérica direta (DNS, dados de MEDIZADEH; OBERLACK (6)). (a) Variação da componente $\bar{u}_1$ ao longo da direção vertical do canal para diferentes valores de Ro . (b) Similarmente para $\bar{u}_3$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 2(a), mostra-se evidente o decaimento monotônico de $\bar{u}_1$ conforme se aumenta Ro . Para rotações iguais a 0.018 e 0.045, ainda se registra uma tendência logarítmica para valores de x_2 a partir de 0.1, o que é uma assinatura de escoamento turbulento. Para $Ro = 0.182$, isso se perde, no entanto. Ainda para este valor da taxa de rotação,

nota-se que, no meio do canal, surpreendentemente, a velocidade na direção x_1 é muito baixa.

Quando se visualiza a componente $\bar{u}_3$, na figura 2(b), nota-se um crescimento dessa componente quando se passa de $Ro = 0.018$ para $Ro = 0.045$ e um posterior decréscimo com $Ro = 0.182$. Portanto, deve haver uma taxa de rotação ótima, que maximiza a componente transversal da velocidade entre esses dois últimos valores, característica também presente no escoamento laminar, revelado pela solução analítica daquele caso. Outra vez, para as rotações mais baixas, percebe-se uma tendência logarítmica em $\bar{u}_3$, que se perde posteriormente. Tal comportamento indica, deste modo, que a rotação interfere no regime o qual um escoamento se desenvolve, isto é, o aumento de Ro revela uma transição de escoamento turbulento para um laminar, mesmo mantendo constante o número de Reynolds.

Essa característica permite enxergar que um escoamento que no canal em repouso é visto como um campo de velocidades que aponta em uma única direção, no referencial girante é percebido como um perfil espiral, que gira em torno do eixo de rotação, que aponta em $\hat{x}_2$. Conforme se aumenta a rotação, para baixos valores de Ro , há uma variação cada vez mais rápida da direção do campo em relação à altura até que, a partir de uma taxa crítica, o módulo da velocidade de escoamento passa a decair monotonicamente.

6 Conclusão

As simulações numéricas diretas consultadas revelaram a reprodução do comportamento previsto pelo modelo teórico do canal em repouso para a tensão cisalhante total e para o perfil de velocidades na subcamada viscosa (relação linear) e na região de sobreposição (lei logarítmica). Quando se introduziu rotação às paredes do canal, as forças inerciais, surgidas no referencial solidário ao movimento das placas, tiveram intensidades distintas: enquanto o efeito centrífugo foi mais sutil, englobado em uma pressão efetiva que impulsiona o escoamento ao longo canal, o efeito Coriolis culminou na rotação do campo médio de velocidades, gerando uma espiral. Mesmo que este modelo não conte com todos os efeitos que influenciam a camada limite atmosférica, o canal turbulento girante serve como base para estudá-la, uma vez que muitas características descritas são observadas, o que ressalta a importância deste estudo.

7 Referências

1. KUNDU, P. K. ; COHEN, I. M. **Fluid Mechanics**. 4. ed. New York, Elsevier, 2008.
2. VIANNA, S. S. V. **Mecânica dos fluidos: uma abordagem fluida e dinâmica**. Rio de Janeiro, E-papers, 2023.
3. DAVIDSON, P. A. **Turbulence: an introduction for scientists and engineers**. Oxford, Oxford university press, 2004.
4. FREIRE, L. S. **Large-Eddy Simulation of smooth channel flow with a stochastic wall model**. 2020. Available at: <<https://www.sistema.abcm.org.br/articleFiles/download/33739>>. Accessible at: 25 Oct. 2023.
5. LEE, M. ; MOSER, R. D. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau \approx 5200$. **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 774, p.395-415, 2015.
6. MEHDIZADEH, A. ; OBERLACK, M. Analytical and numerical investigations of laminar and turbulent Poiseuille–Ekman flow at different rotation rates. **Physics of Fluids**, vol. 22, n.10, p.105104-1 -105104-11, 2010.